



Ekonomski fakultet u Podgorici
Master studije
Poslovna ekonomija

Korporativne finansije

Doc.dr Ana Mugoša

Ključni principi korporativnih finansija

Investirati u projekte s prinosom većim od minimalno zahtijevane stope prinosa

Ma1

Zahtijevana stopa prinosa mora biti veća u slučaju rizičnijih projekata –
odražava finansijski miks preduzeća

Prinos na projekat se mjeri na osnovu novčanih tokova i vremena
nastanka tih tokova

Izabrati finansijski miks koji maksimizira vrijednost preduzeća

Ukoliko nema investicija koje ostvaruju zahtijevanu stopu prinosa, onda treba isplatiti novac akcionarima
kroz dividendu ili otkup sopstvenih akcija preduzeća

Cilj: maksimizirati vrijednost preduzeća

Slide 2

Ma1

Microsoft account, 11/10/2023

Minimalno zahtijevana stopa prinosa – trošak kapitala

Izvori	Iznos	trosak %	trosak	udjeli
Sopstveni kapital	11500000	11%	1265000	0.597403
Preferencijalne akcije	1500000	7%	105000	0.077922
Dug	6250000	5%	312500	0.324675
Ukupno	19250000	8.7%	1682500	1

Trošak kapitala se uvećava za premiju rizika koju nosi projekat – rizik tržišta, hov, zemlje i sl

Investicioni princip

Godina	DFaktor	CF-A	CF-B
1		30000	34500
2		20000	23600
3		24000	21000

Cijena pozajmljenog kapitala 9%

Cijena sopstvenog kapitala 11% (50%:50%)

Investicija 16.000 eura

NSV=

IRR=

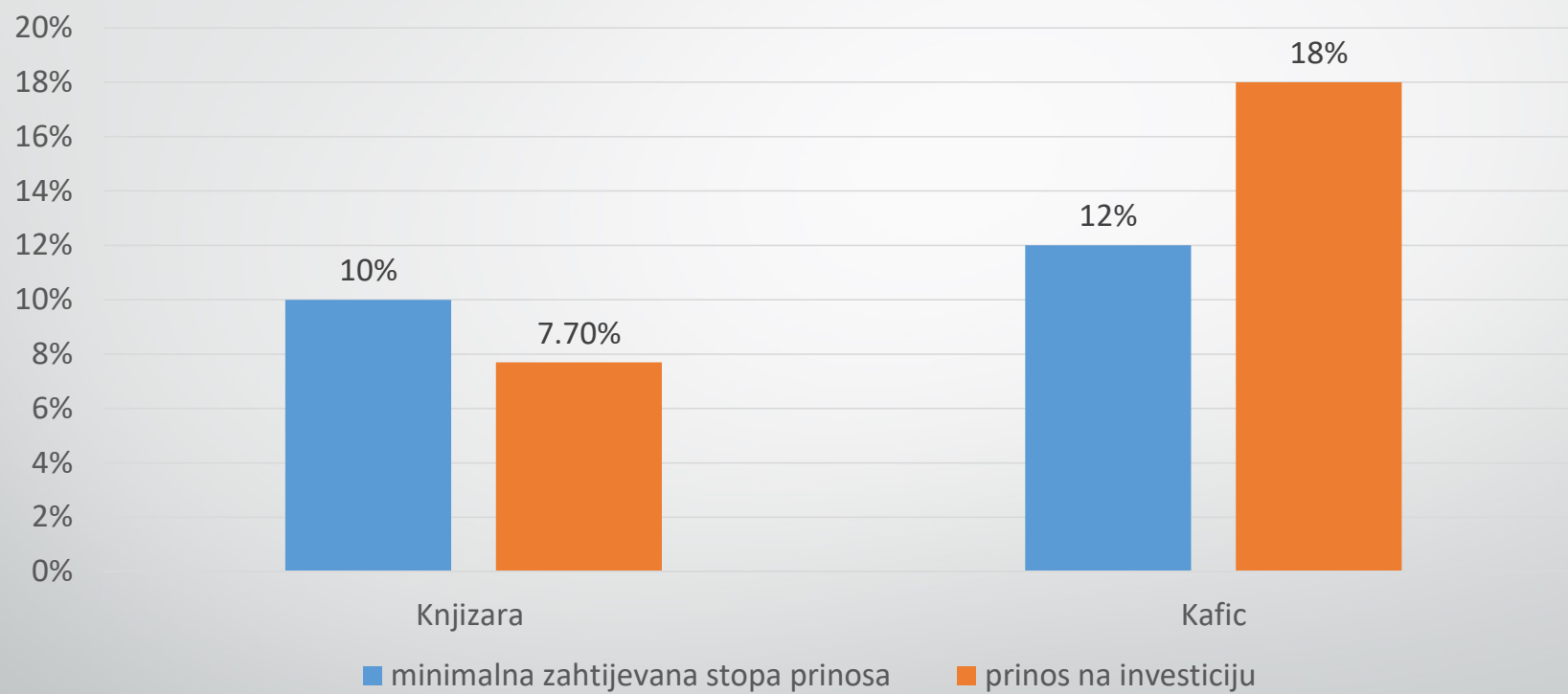
	27272.727	31363.636
	16528.926	19504.132
	18031.555	15777.611
	61833.208	66645.379
npv	45833.208	50645.379

Minimalno zahtijevana stopa prinosa = 10%ako je NSV negativna?

*Prinos na investiciju = 9% ili 22%
kapital*

(PD/prosječno uloženi kapital, ND/prosječno uloženi kapital)

Investicioni princip



Princip finansiranja

Pozajmljena sredstva

- Odnos – struktura kapitala

Sopstveni kapital

- Finansijska ravnoteža

Minimizirati minimalno zahtijevanu stopu prinosa ili trošak kapitala

Odluka o strukturi kapitala...

Aktiva:

Obrtna
sredstva

Osnovna
sredstva

1 materijalna

2 nematerijalna

Kako firma da
prikupi novac za
potrebne
investicije?

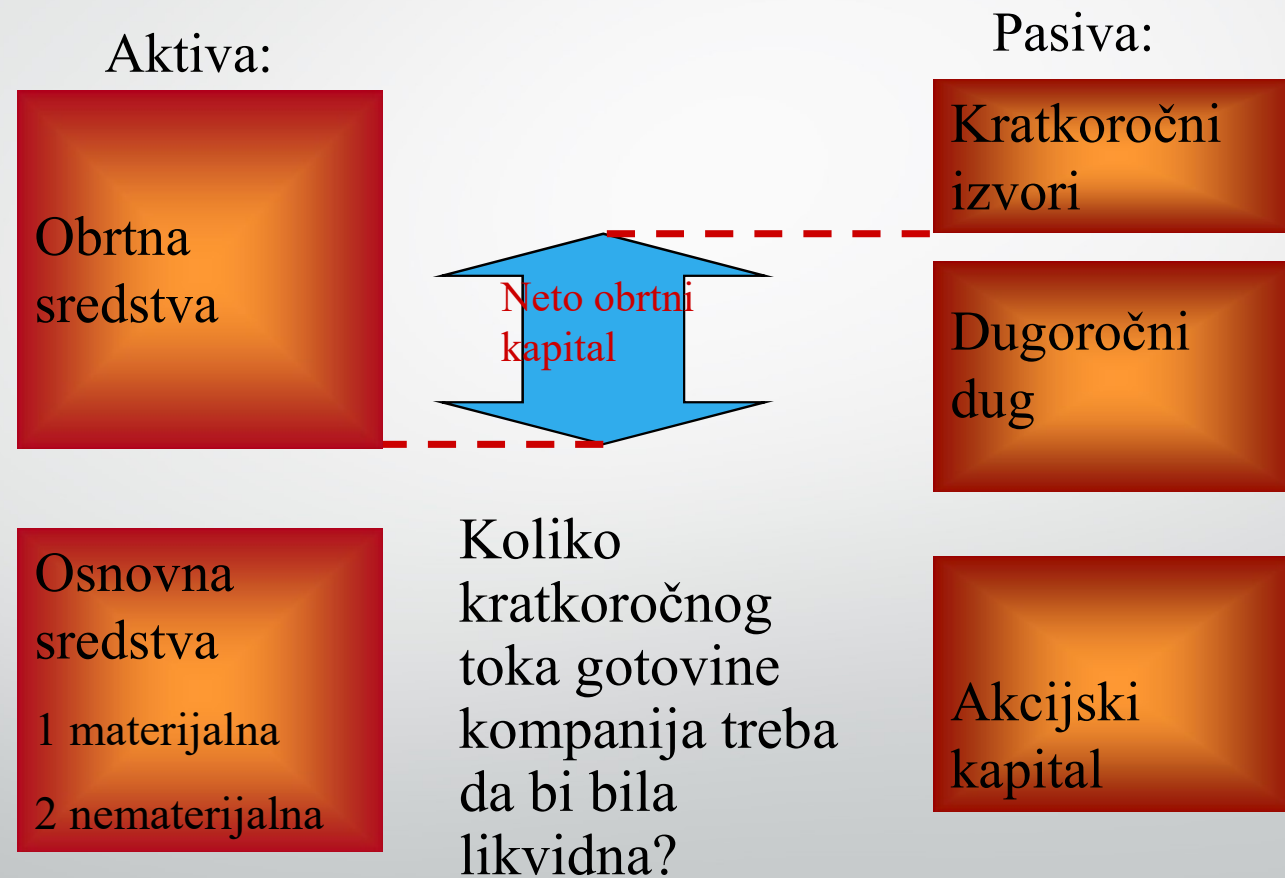
Pasiva:

Kratkoročni
izvori

Dugoročni
dug

Akcijski
kapital

Odluka o neto obrtnom kapitalu



Izvori finansiranja - komparativni pregled

Oblik finansiranja	Izvor kapitala	Vrijeme raspolaganja kapitalom	Troškovi kompanije	Suma raspoloživog kapitala
Reinvestiranje	Sopstveni izvori kompanije	Neograničeno	Oportunitetni profit	Ograničena izvorima kompanije
Bankarski krediti	Poslovna banka	Kratak i dugi rok	Obavezna kamata	Ograničena procjenom banke o likvidnosti kompanije
Emisija obveznica	Javnost	Dugi rok	Obavezna kamata	Ograničena sposobnošću kompanije da ponudi konkurentnu kamatnu stopu
Emisija akcija	Javnost	Permanentno	Obavezna dividenda	Ograničena jedino zakonom ponude i tražnje

Dividendni princip

- Reinvestirati profit – rast vrijednosti preduzeća
- Isplata dijela profita vlasnicima
- Kada su stope prinosa na investiciju značajno veće od troška kapitala, preduzeće treba da isplati dividendu.
- Vrijednost preduzeća – knjgovodstvena vs tržišna vrijednost
- Procjena postojećih i budućih investicija

Ciljevi korporacije

- Šta su ciljevi korporacije?
- **Maksimiziranje cijene akcija?** (ažurne informacije, sopstveni kapital, vrijednost preduzeća)
Aktionari (odbor direktora) → Menadžeri (interesi akcionara) → veća neto dobit → veća vrijednost preduzeća
- Maksimiziranje plata zaposlenih?
- Maksimiziranje zadovoljstva potrošača?
- Maksimiziranje vrijednosti preduzeća?
- Svaka interesna grupa je važna (finansijske institucije, zaposleni, potrošači, društvo, konkurencija).

Ciljevi preduzeća – alternativa maksimiziranju cijene akcija

- Maksimiziranje tržišnog udjela – samo ako povećava vrijednost preduzeća
- Maksimiziranje profita
- Odnos veličina i prihod – konglomerati
- Društvena zajednica
- Akcionari vs vlasnici obveznica (sporazumi prilikom kupovine obveznica: ograničena investiciona politika, ograničena isplata dividendi, ograničeno dodatno zaduživanje preduzeća, vlasnici obveznica postaju akcionari)

Stejkholderi - mapa

		Akcionari			
		Kontrolišu menadžere preko borda direktora	Maksimizacija vrijednosti za akcionare		
Finansijske institucije	Pozajmljuju novac	Menadžeri		Društvena odgovornost troškovi	Društvo
	Štite svoje interese				
		Svima su dostupne sve informacije	Tržišta su efikasna		
		Finansijska tržišta			

„zelena pošta“
(kupovina akcija od investitora ili green mail-era)
„zlatni padobran“
(isplata naknada u slučaju preuzimanja)
„otrovne pilule“
(otkup akcija od strane akcionara po nižim cijenama – usitnjavanje kapitala)

****Agencijski problem****

bord direktora - direktor - akcionari

Primjer lošeg borda Direktora

Reveta F. Bowers 1,5
Head of School
Center for Early Education

Roy E. Disney 3
Vice Chairman
The Walt Disney Company

Michael D. Eisner 3
Chairman and Chief Executive Officer
The Walt Disney Company

Stanley P. Gold 4,5
President and Chief Executive Officer
Shamrock Holdings, Inc.

Sanford M. Litvack
Senior Executive Vice President
and Chief of Corporate Operations
The Walt Disney Company

Ignacio E. Lozano, Jr. 1,2,4
Editor-in-Chief, LA OPINION

George J. Mitchell 5
Special Counsel
Verner, Lipfert, Bernard, McPherson
and Hand

Thomas S. Murphy
Former Chairman
Capital Cities/ABC, Inc.

Richard A. Nunis
Chairman
Walt Disney Attractions

Leo J. O'Donovan, S.J.
President
Georgetown University

Michael S. Ovitz 3
President
The Walt Disney Company

Sidney Poitier 2,4
Chief Executive Officer
Verdon-Cedric Productions

Irwin E. Russell 2,4
Attorney at Law

Robert A.M. Stern
Senior Partner Productions

E. Cardon Walker 1
Former Chairman and Chief Executive Officer
The Walt Disney Company

Raymond L. Watson 1,2,3
Vice Chairman
The Irvine Company

Gary L. Wilson 5
Co-Chairman
Northwest Airlines Corporation

1 Member of Audit Review Committee

2 Member of Compensation Committee

3 Member of Executive Committee

4 Member of Executive Performance Plan Committee

5 Member of Nominating Committee

Finansijsko tržište

- Primarno tržište
 - Emitent - investitor.
- Sekundarno tržište
 - Podrazumijeva kupoprodaju već emitovanih HOV između investitora.
 - HOV se mogu prometovati na vanberzanskom ili berzanskom tržištu.
- Da li su tržišta efikasna – asimetrija u informacijama

Rizici i koristi od HOV

	rizik	rok plaćanja	prihod	likvidnost	pravo glasa	Potraživanje u slučaju likvidacije
obveznice	umjeren	do 30 god.	fiksni	varijabilna	ne	prije akcionara
prioritetne akcije	umjeren	-	fiksni	varijabilna	ne	prije običnih akcionara
obične akcije	umjeren do visok	-	varijabilni	visoka	da	poslije prioritetnih akcionara
zajednički fondovi	umjeren do visok	-	varijabilni	visoka	da	-



Vremenska vrijednost novca

Sadašnja vrijednost

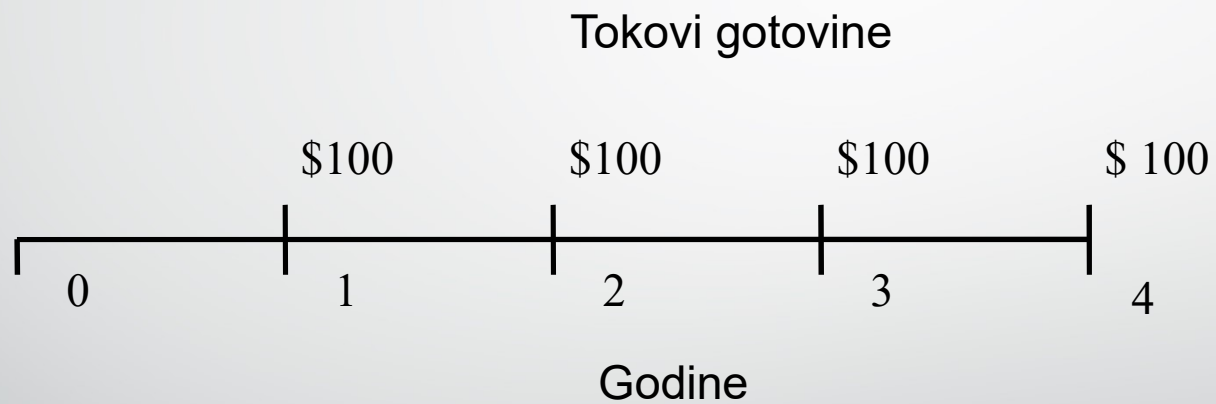
- Zašto je 1€ sutra manje vrijedan od 1€ danas:
 - Pojedinci preferiraju sadašnju u odnosu na buduću potrošnju.
 - Kada postoji inflacija, vrijednost novca opada tokom vremena.
 - Što je u budućnosti veća neizvjesnost (rizik) u pogledu budućih tokova gotovine, tok gotovine je manje vrijedan.
 - Stopa doživljenja narednog perioda $p < 1$

Diskontovanje i ukamaćivanje...

- Mehanizam kojim se sva tri (četiri) elementa obuhvataju u analizi naziva se diskontna stopa.
- **Diskontna stopa** – stopa po kojoj se upoređuju sadašnji i budući tokovi gotovine.
- Diskontna stopa, takođe predstavlja oportunitetni trošak jer ona odražava prinose koje je individua mogla ostvariti nekom drugom alternativom.
- Diskontovanje budućih novčanih tokova vrši njihovo konvertovanje u tokove gotovine izražene sadašnjom vrijednošću novca.
- Ukamaćivanje konvertuje sadašnje novčane tokove u buduće novčane tokove.

Vremenski tok gotovine

n-period
r-kamata



Diskontni faktor

- Ulažemo 100 eura na godinu dana...kamata je 8%. Izračunati buduću vrijednost uloženog novca
- Izvesti obrazac za diskontni faktor

Tipovi tokova gotovine i diskontni mehanizmi...

- Postoji pet tipova tokova gotovine:
 - Prosti (jednostavni) tok gotovine,
 - Anuitet,
 - Rastući anuitet,
 - Neprekidni tok gotovine,
 - Rastući neprekidni tok gotovine.

1. prosti tok gotovine

Prosti tok gotovine (*simple cash flow*) je običan a gotovinski tok u određenom vremenskom periodu.

Cash Flow: CF_t
|-----|
Vremenski period: t

- *Sadašnja vrijednost (PV) toka gotovine je:*

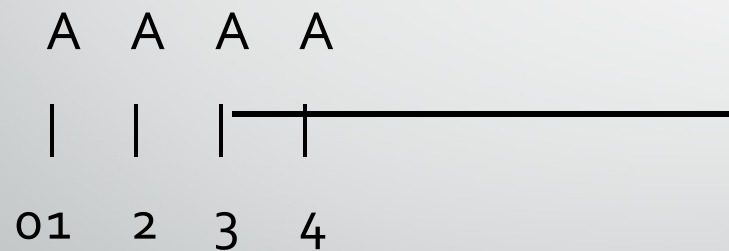
$$PV \text{ prostog toka gotovine} = CF_t / (1+r)^t$$

- *Buduća vrijednost (FV) toka gotovine je:*

$$FV \text{ prostog toka gotovine} = CF_0 (1+r)^t$$

2. anuiteti

Anuitet je konstantni tok gotovine koji se odvija u regularnim vremenskim intervalima za određeni period vremena. Neka je A anuitet,



Sadašnja vrijednost anuiteta...

Sadašnja vrijednost anuiteta može se izračunati diskontovanjem svakog toka gotovine, tj. njegovim svođenjem na sadašnju vrijednost i njihovim sabiranjem. Alternativno, korišćenjem sljedeće formule [A = anuitet; r = diskontna stopa; n = broj godina]

$$PV \text{ anuiteta} = PV(A, r, n) = A \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \right]$$

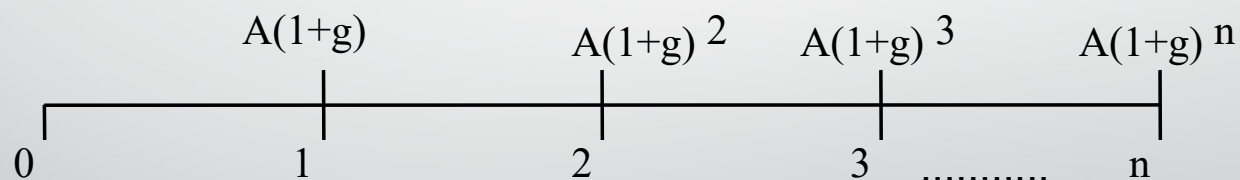
Buduća vrijednost anuiteta...

Buduća vrijednost anuiteta na kraju godišnjih perioda se može izračunati na sljedeći način:

$$\text{FV of an Annuity} = \text{FV}(A, r, n) = A \left[\frac{(1 + r)^n - 1}{r} \right]$$

3. rastući anuiteti

Rastući anuitet je tok gotovine koji raste po konstantnoj stopi tokom određenog perioda. Ako je A tekući tok gotovine, a g očekivana stopa rasta, vremenski horizont za rastuće anuitete izgleda:



Sadašnja vrijednost rastućeg anuiteta

Sadašnja vrijednost rastućeg anuiteta može se izračunati u svim slučajevima (osim u jednom – kada je stopa rasta jednaka diskontnoj stopi) koristeći sljedeći model:

$$PV \text{ anuiteta} = PV(A, r, g, n) = A(1+g) \left[\frac{1 - \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n}}{(r-g)} \right]$$

4. neprekidni tok gotovine

Neprekidni tok gotovine (*perpetuity*) je konstantni tok gotovine u regularnim vremenskim intervalima neprekidno. Sadašnja vrijednost ovakvog toka gotovine je:

$$PV \text{ neprekidnog toka gotovine} = \frac{A}{r}$$

5. rastući neprekidni tok gotovine

Rastući neprekidni tok gotovine je onaj za koji se očekuje da će rasti po konstantnoj stopi zauvijek. Sadašnja vrijednost ovog toka je:

$$PV \text{ rastuceg neprekidnog toka} = \frac{CF_1}{(r - g)}$$

gdje je

- CF_1 očekivani tok gotovine prve godine,
- g konstantna stopa rasta i
- r diskontna stopa.



Analiza finansijskih izvještaja

Pitanja koja proučavamo...

AKTIVA		PASIVA	
Kako se procjenjuje? Koliko je rizična?	Dugoročna	Dug	Kolika je vrijednost? Koliko je rizičan?
Kako se procjenjuje? Koliko je rizična?	Kratkoročna	Akcijski kapital	Kolika je vrijednost? Koliko je rizičan?

.

Osnovni finansijski izvještaji

- Bilans stanja, šta firma posjeduje i šta duguje u određenom vremenskom trenutku.
- Bilans uspjeha, koji izvještava koliko je firma zaradila u izvještajnom periodu.
- Izvještaj o toku gotovine, koji izvještava o prilivima i odlivima gotovine tokom izvještajnog perioda.

Bilans stanja

AKTIVA		PASIVA	
Dugoročna aktiva	Osnovna sredstva	Tekuće obaveze	Kratkoročne obaveze
Kratkoročna aktiva	Tekuća aktiva	Dug	Dug. dugovni instrumenti
Investicije u HOV i ulozi u treća lica	Finansijski instrumenti	Ostale dugoročne obaveze	Ostali dug. obaveze
Patenti, licence	Nematerijalna aktiva	Vlasnički kapital	Akcijski kapital

Bilans uspjeha

Bruto prihod od prodaje	Prihodi
Proizvodni troškovi	- Operativni troškovi
Poslovni prihod	= Operativni prihod
Troškovi kamata	- Finansijski troškovi
Porez na oporezivi prihod	- Porezi
Zarade običnim i prioritetnim akcionarima	= Neto prihod prije vanrednih stavki
Dobici i gubici iz vanposlovnih aktivnosti	- (+) Vanredni gubici (dobici)
Promjena račun. pravila	- Prihod ili gubici usljed promjena računov. pravila
Dividende preioritetnim akcionarima	- Preferencijalne dividende
	= Neto prihod običnim akcionarima

Modifikacije bilansa uspjeha

- Neke vrste troškova bi u slučaju *procjene vrijednosti preduzeća* trebale biti drugačije kategorizovane u finansijskim izvještajima, posebno:
 - Operativni lizing, kojeg računovođe smatraju operativnim troškom, a zapravo je finansijski trošak
 - R & D troškovi se, takođe, tretiraju kao operativni troškovi, a zapravo su kapitalni troškovi.

Primjer-R&D

R&D=1594 amortizacioni period= 5 godina

Marža pokrica (EBIT)	3195.00
Porez na dobit	40.00%
Neto dobit	1025.00
Ukupni kapital	5256.00
Kapitalni rashodi	655.00
Amortizacija	525.00

Godine	R& D troškovi
1	1026.00
2	698.00
3	399.00
4	211.00
5	89.00

Primjer-R&D - nastavak

Godina	R&D	Neamortizovan dio		Amortizacija
Tekuci period	1594.00	1.00	1594.00	0.00
-1	1026.00	0.80	820.80	205.20
-2	698.00	0.60	418.80	139.60
-3	399.00	0.40	159.60	79.80
-4	211.00	0.20	42.20	42.20
-5	89.00	0.00	0.00	17.80
Vrijednost sredstva			3035.40	484.60

0.20
0.20
0.20
0.20
0.20

R&D u tekucem periodu =
Amortizacija =

1594.00
484.60

	R&D kao operativni troškovi	R&D kao kao kapitalni troškovi
Poslovna dobit (EBT)	3195	4304.40
Poslovna dobit - porez	1917	3026.40
Neto dobit	1025	2134.40
Ukupni kapital	5256	8291.40
Prinos na kapital	36.47%	36.5%
Kapitalni rashodi	655	2249.00
Amortizacija	525	1009.60

R&D povećavaju
vrijednost
preduzeća i
novčanih tokova

Izvještaj o toku gotovine

Neto tok gotovine iz poslovanja,
nakon oporezivanja i troš. kamate

Tok gotovine iz poslovnih aktivnosti

kapitalni izdaci (prodaja i
kupovina opreme), izdaci za uloge
u treća lica i finansijske instrumente

+ Tok gotovine po osnovu investiranja

Neto tok gotovine od emitovanja
i otkupa akcija, otplate obveznica
i nakoj isplate dividendi

+ Tok gotovine po osnovu finansiranja

= Neto promjena u bilansu novčanih tokova

Neizvjesnost kod procjenjivanja imovine obveznice

- Rizik neispunjenja obaveza
- Na primjer, niži rejting, veći rizik, veći očekivani prinos na obveznice (kupon)
- Prilagođavanje kamatne ili diskontne stope
- Za svaki rejting se definiše odgovarajuća premija koja se dodaje bezrizičnoj stopi
- Kamatna stopa (diskontna stopa): $\text{bezrizična stopa} + \text{premija rizika}$



Vrijednost i cijena – akcije i obveznice

Procjena vrijednosti obveznica

Bezrizične beskamratne obveznice – diskontujemo samo nominalnu vrijednost (r_f)

Bezrizične kuponske obveznice - diskontujemo i kupone i nominalnu vrijednost (r_f ili ponderisana stopa)

Kuponske obveznice – diskontujemo kupone i nominalnu vrijednost po prinosu do doopijeća

Neizvjesnost kod procjene obveznice

- Boing je emitovao obveznicu koja dospijeva za 35 godina uz kuponsku stopu od 8.75% na godišnjem nivou (polugodišnje isplate). Zbog rizika izmirenja obaveze (mjereno rejtingom), kamatna stopa je za 0,5% veća od državnih obveznica, čija je kamata 5.5%.

- $$\text{Cijena obveznice} = \sum_{t=0.5}^{35} \frac{43.75}{1.06^t} + \frac{1000}{1.06^{35}} = 1404.25$$

Neizvjesnost kod procjenjivanja imovine

Procjena akcijskog rizika

- **Trošak vlasničkog kapitala (*Cost of Equity*)** - ovo je stopa prinosa potrebna vlasnicima kapitala. Ona obuhvata premiju rizika za vlasnički kapital – veći rizik, veća premija (ROA, ROE, CAPM, HPR)
- **Trošak kapitala (*Cost of capital*)** - ovo je kompozitni trošak ukupnog kapitala koji je investiran u neko sredstvo ili preduzeće. To je ponderisani prosjek troška vlasničkog kapitala i troška pozajmljivanja, nakon oporezivanja.
- *Primjer evaluacija investicionog projekta*

Dva načina određivanja toka gotovine

- Tok gotovine prema akcionarima – ovo su tokovi gotovine generisani sredstvima (aktivom) koji nastaju poslije svih troškova i poreza i poslije svih otplata duga. Ovi tokovi gotovine nazivaju se tok gotovine prema investitorima u vlasnički kapital.
- $FCFE = \text{neto dobit} + \text{amortizacija} - \text{reinvestiranje} + (\text{obaveze ili priliv sredstava po osnovu zaduživanja} - \text{otplaćeni dug})$

Reinvestiranje: dugoročne investicije i neto obrtni fond

- Tok gotovine prema preduzeću – ovo je šira definicija toka gotovine koja se često koristi, gdje ne posmatramo samo kako sredstva generišu tok gotovine vlasnicima kapitala, već ukupne tokove gotovine generisane, kako vlasnicima kapitala tako i zajmodavcima. Ovaj tok gotovine, koji nastaje *prije isplate duga*, ali poslije operativnih troškova i poreza, zove se tok gotovine prema preduzeću.
- $FCFF = \text{poslovna dobit nakon oporezivanja} + \text{amortizacija} - \text{reinvestiranje}$

Procjena diskontovanog toka gotovine

$$\text{Vrijednost} = \sum_{t=1}^{t=n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$

gdje je:

- n = životni vijek sredstva
- CF_t = tok gotovine u periodu t
- r = diskontna stopa koja odražava rizik ocijenjenog toka gotovine

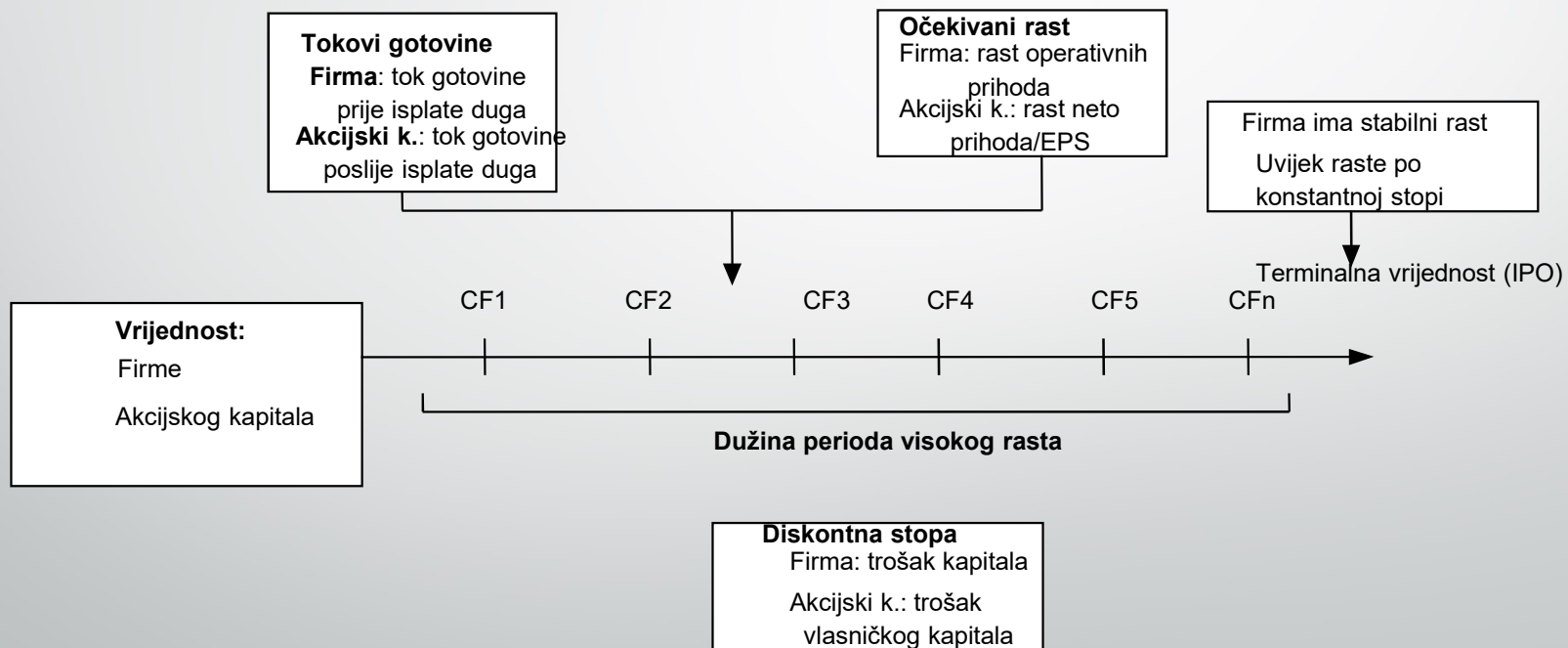
Vrijednost sredstava sa ograničenim vijekom trajanja

$$\sum_t^n \frac{CF_t}{(1+k)^t} + \frac{\text{vrijednost na kraju vijeka trajanja}}{(1+k)^t}$$

$$\text{Primjer vrijednost akcije} = \sum_t^n \frac{DIV}{(1+k)^t} + \frac{\text{Cijena na kraju perioda}}{(1+k)^t}$$

Gordonov model, vrijednost beskonačnog novčanog toka (perpetuitet)

DCF model za procjenu vrijednosti





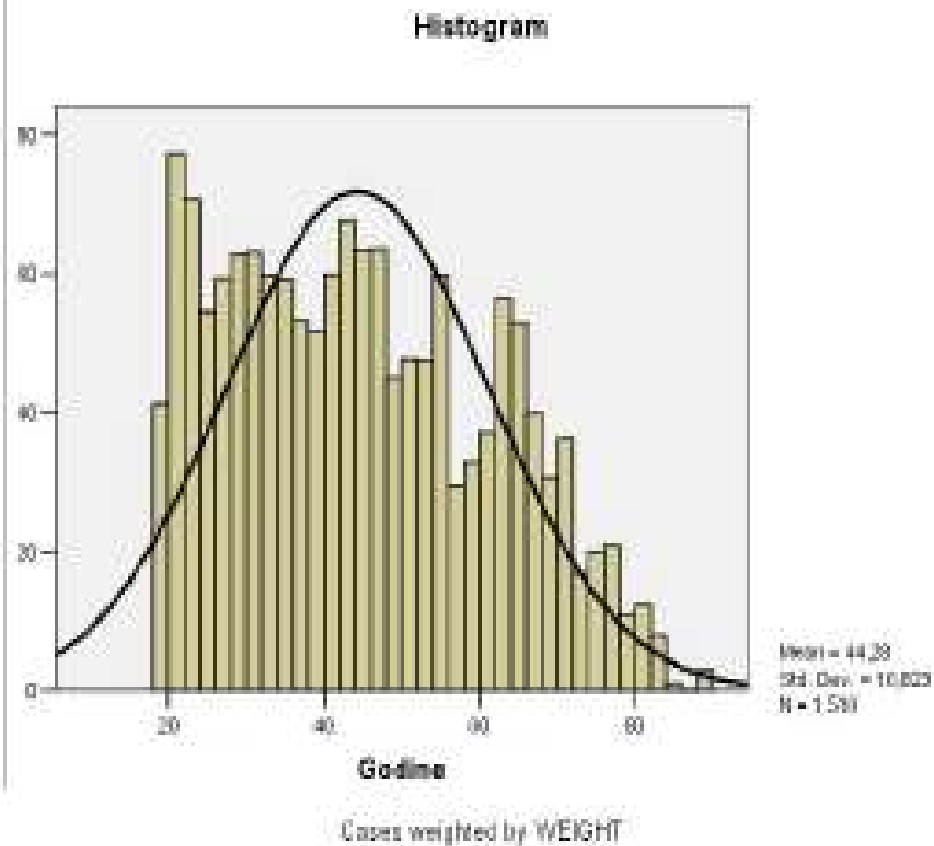
Osnove rizika

Mjere deskriptivne statistike

- ▶ Mjere centralne tendencije
- ▶ Mjere varijabilnosti
- ▶ Procjenu i značaj distribucije

PRIMJER: Godine ispitanika

Statistics		
Godine		
N	Valid	1518
	Missing	0
Mean		44.28
Std. Error of Mean		.432
Median		43.00
Mode		21
Std. Deviation		18.823
Variance		283.018
Skewness		.317
Std. Error of Skewness		.063
Kurtosis		-.888
Std. Error of Kurtosis		.128
Range		72
Minimum		18
Maximum		90
Sum		67110
Percentiles	25	30.00
	50	43.00
	75	57.66
	90	65.00



Šta su to mjere centralne tendencije?

- ▶ ključna svrha upotrebe **mjera centralne tendencije u društvenim naukama.**
- ▶ statistički parametri - sve vrijednosti jednog numeričkog niza (varijable) se 'centriraju' i iskazuju posredstvom određene (jedne) numeričke vrijednosti
- ▶ **Redukcionizam** - singularni numerički izraz

Aritmetička sredina

- ▶ društvene nauke - prosječne karakteristike populacije ili uzorka.
- ▶ DEFINICIJA: Aritmetička sredina nekog seta kvantitativnih podataka (numeričkog niza) jeste suma svih vrijednosti podijeljena sa ukupnim brojem podataka od kojih se uzorak sastoji:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Napomena: Simbol \bar{x} koristi kada se označava aritmetička sredina uzorka, dok se simbol μ koristi kada je reč o populaciji

Aritmetička sredina: interpretacija, pouzdanost i smisao

- Npr. Ako kažemo da su ispitanici u našem uzorku stari u prosjeku 44 godine to znači da.....
- Dva su ključna faktora od kojih zavisi preciznost ovog podatka (aritmetičke sredine)
 1. Od veličine uzorka
 2. Od varijabilnosti tj. opsega (rasprostranjenosti)

MEDIJANA

- ▶ Medijana, takođe, jeste neka vrsta prosječne vrijednosti
- ▶ DEFINICIJA: Medijana nekog kvantitativnog seta podataka jeste srednji broj u situaciji kada se sve vrijednosti poređaju od najniže do najviše ili obrnuto
- ▶ Ukoliko je niz brojeva neparan, onda je medijana broj u sredini. Ukoliko je broj paran, onda je medijana srednja vrijednost srednja dva broja.

Medijana primjer

- ▶ Pr.1. Ako se varijabla sastoji od 7 brojeva 5,7,4,5,20,6 i 2 onda se medijana izračunava:

2,4,5,**5**,6,7,20 $M=5$ (broj u sredini posmatrano s krajeva)

- ▶ Pr.2. Ukoliko je pak varijabla sa parnim brojem brojeva ($n=6$) , npr. varijabla 4,5,5,6,7,20 onda se medijana izračunava:

4,5,**5,6**,7,20 $M = (5+6)/2 = 5.5$

Medijana: interpretacija, pouzdanost i smisao

- U nekim situacijama medijana je bolja mjera centralne tendencije u odnosu na aritmetičku sredinu. Zašto?
- Neke varijable u društvenim istraživanjima su naročito pogodne za medijanu, npr. prihod iskazan u intervalnoj skali.
- Prosjek zarada – aritmetička sredina ili medijana?

Modus

- *Modus* najčešća vrijednost koja se pojavljuje u jednom setu brojeva. Npr. ako je set brojeva:
- 3,4,6,1,8,8,9,3,4,6,8,2,3,8,8,0,9,8,4,5,6,8,3,3,4,7,8,9,8,0,8,5,8,
- Onda je modus = 8, dakle, broj koji se najviše puta pojavio u nizu.

Značaj i upotreba modusa

- U zavisnosti od prirode podataka modus može biti manje ili više korisna mjera centralne tendencije
- U našem primjeru da u uzorku ima najviše ispitanika koji imaju 21 godinu, taj podatak nam i ne govori mnogo. Međutim, ako pogledamo grafik primijetićemo da je distribucija neravnomjerna upravo u ovom sektoru, tačnije kod mlađe kategorije ispitanika

Primjer upotrebe modusa

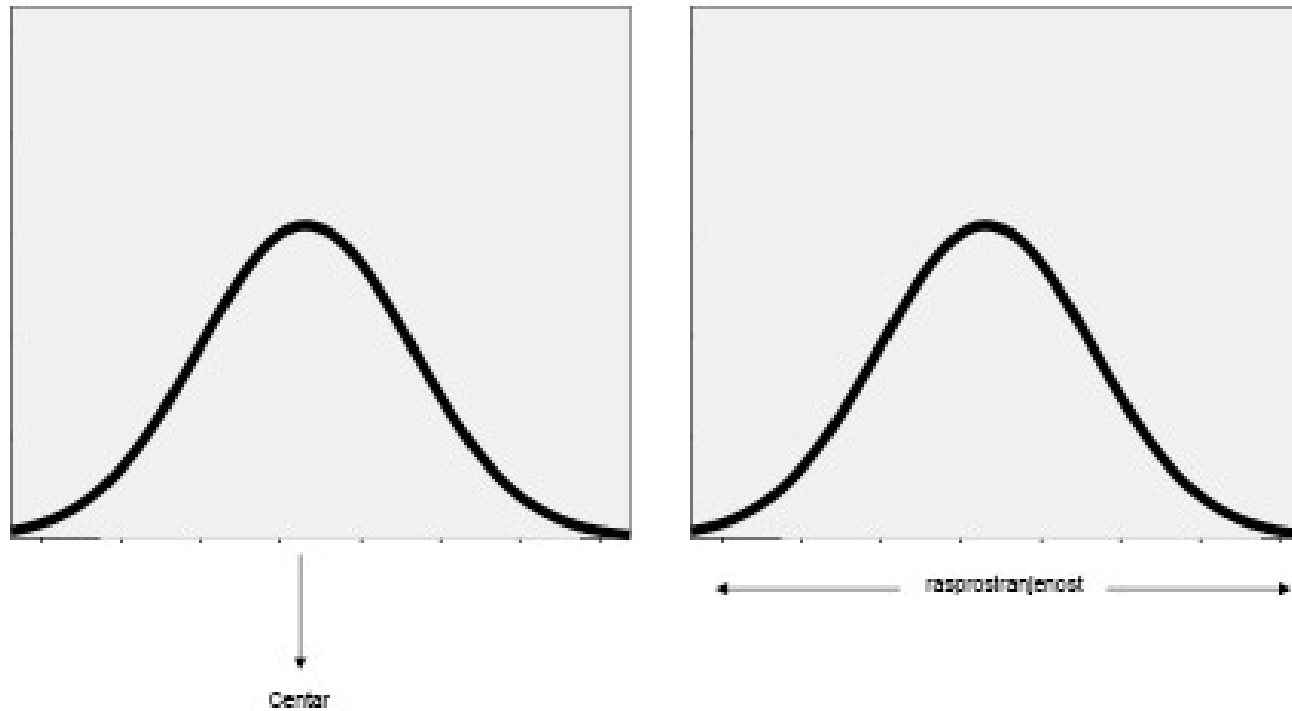
- U istraživanjima se nerijetko koriste likertove ljestvice procjene koje imaju vrijednosti npr.: veome dobro, dobro, loše i veoma loše.
- petostepena skala: „uopšte se ne slažem“, „ne slažem se“, „nemam mišljenje“, „slažem se“, „potpuno se slažem“

U ovakvim situacijama modus nam daje vredniju informaciju u poređenju sa aritmetičkom sredinom i medijanom. Zašto?

Varijabilnost

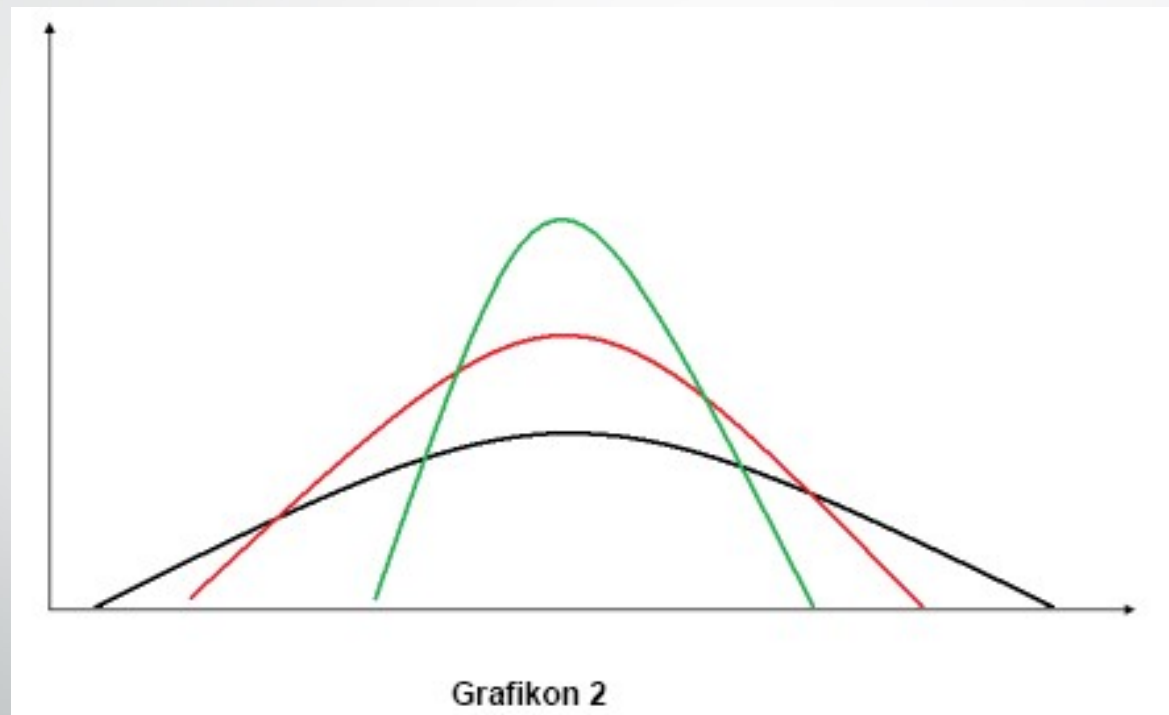
- Mjere centralne tendencije samo parcijalno opisuju podatke.
- Centralna tendencija uz mjere varijabilnosti nam pomaže da vizualizujemo oblik jedne distribucije.
- Varijabilnost je sastvani dio distribucije

Distribucija



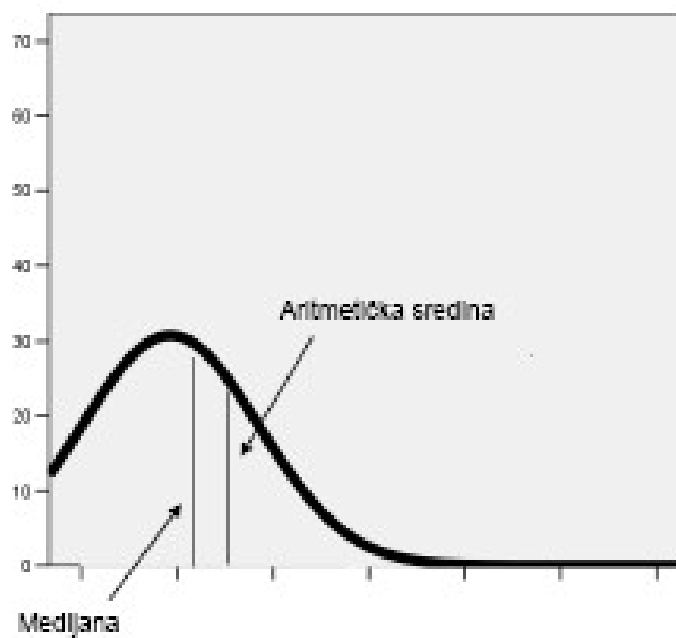
Grafikon 1

Moguće distribucije sa istom aritmetičkom sredinom



Distribucija 1

Primjer asimetrične distribucije nakrivljene u desno



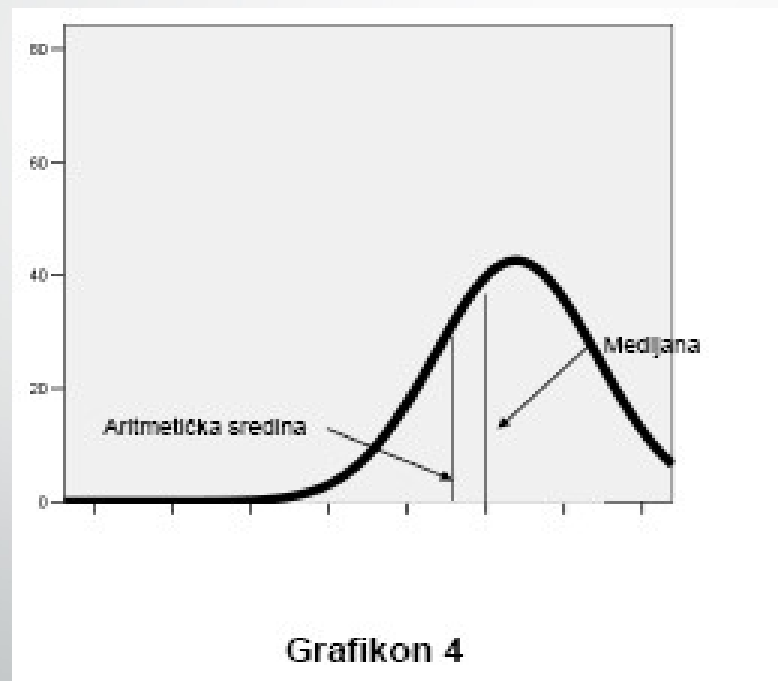
Grafikon 3

Distribucija nakrivljena u desno

- 2,2,2,2,2,3,3,3,4,4,5,5,5,8,9,10,11,12,13,14
- Medijana je $(4+5)/2=4.5$
- Aritmetička sredina $119/20=5.95$

Distribucija 2

Primjer asimetrične distribucije nakrivljene u lijevo

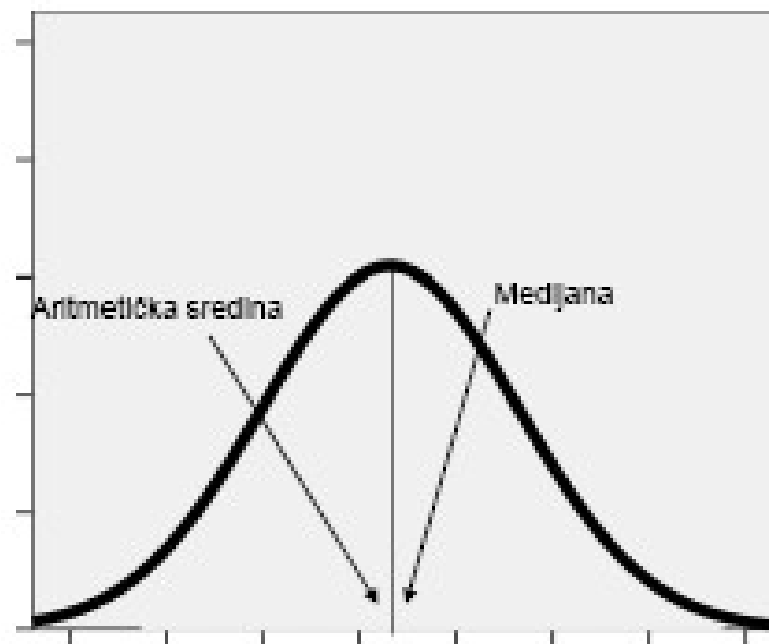


Distribucija nakrivljena u lijevo

- 2,2,3,4,5,5,8,8,8,8,9,9,9,9,9,10,10,11,11,11
- Medijana $(8+8)/2=8$
- Aritmetička sredina = $151/20 = 7.55$

Distribucija 3

Simetrična (Normalna) Distribucija



Grafikon 5

Normalna distribucija

- 2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5
- Medijana $(3+4)/2=3.5$
- Aritmetička sredina $42/12=3.5$

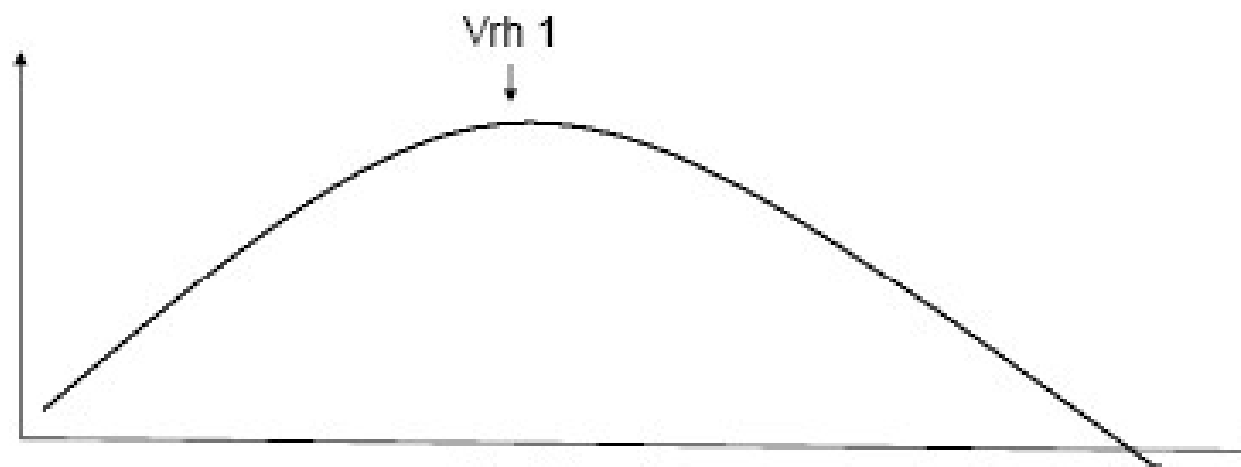
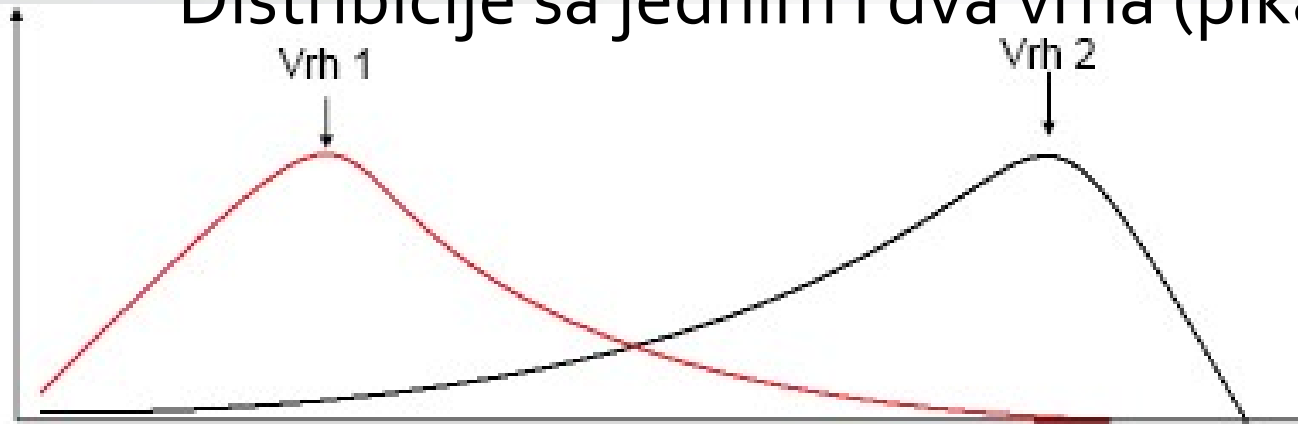
Normalna distribucija

- Normalna distribucija predstavlja onaj tip distribucije u kojem se vrh distribucije poklapa sa aritmetičkom sredinom distribucije (grafikon 5)
- Ovaj tip distribucije ima oblik 'zvona' pa se često upravo ovaj figurativan naziv koristi za normalnu distribuciju
- Normalna distribucija, kao koncept, igra veoma važnu ulogu u statistici, naime, veliki broj statističkih testova počiva na pretpostavci da su vrijednosti normalno distribuirane.

Asimetrična distribucija

- Asimetrična distribucija je onaj tip distribucije u kome se aritmetička sredina ne poklapa sa vrhom distribucije.
- Distribucija može biti asimetrična u dva smjera: prvo, ona može biti iskrivljena u desno (grafikon 3) i ona može biti iskrivljena u lijevo (grafikon 4)
- Najgori mogući slučaj asimetrične distribucije jeste ukoliko je ona nakrivljena istovremeno i u lijevo i u desno - ona ima dva vrha
- Kada imamo slučaj izrazito asimetrične distribucije, onda nam to govori da mi u okviru populacije imamo dve kategorije (kohorte), koje se suštinski razlikuju po datoj karakteristici . Odvojena analiza..

Distribucije sa jednim i dva vrha (pika)



Grafikon 6

Skewness - asimetrija/iskrivljenost/zakošenost/ nagib distribucije

- Skewness je parametar koji pokazuje da li je distribucija asimetrična ulijevo ili udesno
- Treći momenat distribucije
- Skewness je jednak 0 ako je distribucija simetrična, a u suprotnom imaće vrijednost drugačiju od 0 sa predznakom koji je identičan kao i asimetrija
- Negativna asimetrija, to znači da je distribucija nakošena ulijevo, tj. u tom slučaju veća je frekvencija natprosječnih vrijednosti.
- Pozitivna asimetrija, onda je distribucija nakošena udesno, i to znači da je frekvencija vrijednosti u korist ispodprosječnih vrijednosti

Kurtosis – spljoštenost distribucije

- Kurtosis je parametar koji pruža informaciju o rasprostranjenosti distribucije po y osi.
- Kurtosis zapravo govori o tome u kojoj mjeri su vrijednosti koncentrisane oko aritmetičke sredine.
- Grafikon 2 pokazuje različite mogućnosti distribucije koje su normalne, spljoštene ili zaoštrene.
- Četvrti momenat distribucije μ_4 ima vrijednost 3 za normalnu distribuciju ($\mu_4 < 3$ distribucija je spljoštenija od normalne, $\mu_4 > 3$ distribucija je zašiljenija od normalne)
- Takođe, od vrijednosti koju smo dobili možemo oduzeti 3 tako da idealna distribucija ima kurtosis = 0
- U tom slučaju, spljoštene distribucije imaju negativnu (-) vrijednost a zašiljene pozitivnu (+) vrijednost kurtosisa

Primjer

xi	fi	$X_i - \mu$	$(X_i - \mu)^3$	$f_i(X_i - \mu)^3$	$f_i(X_i - \mu)^4$
4	3	-3.025	-27.6807	-83.0421	251.2018
5	5	-2.025	-8.3037	-41.5185	84.0756
6	6	-1.025	-1.0769	-6.4614	6.6229
7	10	-0.025	-0.000	0	0
8	8	0.975	-0.9268	-7.4144	7.2290
9	6	1.975	7.7037	46.2222	91.2888
10	2	2.975	26.3305	52.661	156.6671
Σ	40			-24.7244	597,0845

Rješenje

$$\bar{X}=7.025 \quad \sigma^2=2.576 \quad \sigma=1.605$$

$$M_3=-24.7244/40=-0.6181$$

$$M_4=597.0845/40=14.9271$$

$$\alpha_3=M_3/\sigma^3$$

$$\alpha_3=-0.6181/4.134=-0.15 \quad \text{nakošena}$$

ulijevo

$$\alpha_4=M_4/\sigma^4$$

$\alpha_4=14.9271/6.636=2.25$ **spljoštenija od normalne**

- ▶ Ako oduzmemo 3 od rezultata kurtosisa dobijamo -0.75 (negativna vrijednost znači spljoštenu distribuciju)

Mjere varijabilnosti

- U statistici postoje numeričke **mjere varijabilnosti**
- Mjere varijabilnosti imaju za cilj da numerički precizno ukažu u kojoj mjeri distribucija vrijednosti odstupa od centralne tendencije

Interval (Range)

- ▶ Apsolutna mjera disperzije
- ▶ Opseg (Range) je najjednostavnija mjera varijabilnosti i on odgovara razlici između najveće(max) i najmanje(min) izmjerene vrijednosti u nizu.
- ▶ U našem gornjem primjeru u kojima smo dali prikaz distribucije godina ispitanika Opseg = $90 - 18 = 72$
- ▶ NAPOMENA: Range je jedna od mjera varijabilnosti koja je sasvim nedostatna, naime, u okviru opsega (max-min) moguće su sasvim različite distribucije vrijednosti

Varijansa i Standardna devijacija

- *Standardna devijacija* je jedna od ključnih mjera varijabilnosti koja ukazuje u kojoj su mjeri vrijednosti udaljene od aritmetičke sredine.
- Da bi izračunali standardu devijaciju nužno je prvo izračunati **varijansu**

Varijansa se izračunava po sledećoj formuli:

Kalkulacija za varijansu i SD

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Npr. ako je niz brojeva 1,2,3,4,5, aritmetička sredina je 3 i onda je varijansa:

$$s^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5-1} = \frac{4+1+0+1+4}{4} = 2.5$$

Na osnovu varijanse se izračunava standardna devijacija, a ona predstavlja pozitivni kvadratni korijen varijanse.

$$s = \sqrt{s^2}$$

Prema tome u našem primjeru SD je: $s = \sqrt{2.5} = 1.58$

Realtivna mjera disperzije

- Koeficijent varijacije
- σ/μ
- Koliki je udio odstupanja u aritmetičkoj sredini
- $1.58/3=0.5266$
- Ako se radi o cijenama, kakav bi bio komentar?

Interpretacija standardne devijacije

- Standardna devijacija uz aritmetičku sredinu nam pruža veoma korisne informacije.
- Ključna uloga standardne devijacije jeste da se na osnovu nje formiraju intervali povjerenja

$$\pm 1 \text{ SD} \quad \bar{x} - s, \quad \bar{x} + s$$

$$\pm 2 \text{ SD} \quad \bar{x} - 2s, \quad \bar{x} + 2s$$

Upotrebljivost S na našem primeru

- ▶ Dakle, aritmetička sredina starosti naših ispitanika je 44,28, a standardna devijacija je 16,82. Slijedi:

$$\begin{array}{c} \pm 1 \text{ SD} \\ 44,28 - 16,82 = 27,46 \text{ i } 44,28 + 16,82 = 61,1; \quad \pm 1 \text{ SD} = \text{od } 27,46 \text{ do } 61,1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \pm 2 \text{ SD} \\ 44,28 - 33,64 = 10,64 \text{ i } 44,28 + 33,64 = 77,92; \quad \pm 2 \text{ SD} = \text{od } 10,64 \text{ do } 77,92 \end{array}$$

Distribucija je asimetrična i to udesno, naime, sa +/-dvije standardne devijacije mi smo potpuno iscrpjeli niske vrijednosti tj. mlađi, dok još uvek nismo obuhvatili visoke vrijednosti tj. stariji.

Empirijsko pravilo za interpretaciju standardne devijacije

- Ukoliko je distribucija normalna:
 - Oko 68% vrijednosti će biti obuhvaćene $\pm 1S$
 - Oko 95% vrijednosti će biti obuhvaćene $\pm 2S$
 - Oko 99,7% vrijednosti će biti obuhvaćene $\pm 3S$

Upotrebljivost

- Ako su prosječna primanja u Crnoj Gori 300 EUR sa standardnom devijacijom 130 EUR. To znači da oko 68% populacije u Crnoj Gori ima primanja između 170 i 430 EUR i oko 95% populacije ima platu od 40 do 560 EUR

Percentili

- Percentili predstavljaju sumarne kumulativne pokazatelje distribucije iskazane relativnim frekvencijama
- Percentili u suštini dijele ukupnu kumulativnu distribuciju u jednoj tački, te prema tome se distribucija dijeli na dva dijela
- Najčešći u upotrebi je tzv 50-ti percentil, koji ima vrijednost medijane. Kada je o njemu riječ, ukupna distribucija se dijeli na način da polovina slučajeva (objekata) ima vrijednosti ispod a polovina iznad medijane.
- U upotrebi su takođe i 25-ti, 75-ti percentil, a nekada se koriste i 10-ti i 90-ti percentil
- Upotreba je jednostavna, npr. ako je u našem primjeru sa godinama vrijednost na 25-om percentilu =30, to znači da 25% populacije jeste mlađe od 30 godina. Budući da je vrijednost 75-og percentila 57,6, to znači da je 75% naših ispitanika mlađe od 57,6 godina. Konsekventno, pošto je vrijednost na 90-tom percentilu 68, proističe da je 90% naših ispitanika mlađe od 68 godina.
- Budući da 25-ti, 50-ti i 75-ti percentil dijeli populaciju u četiri grupe, njih nazivamo **kvartilima** a razliku između 75-tog i 25-tog, nazivamo **interkvartilni opseg** (IQR – interquartile range)

Portfolio hartija od vrijednosti

Slaganje prinosa hartija od vrijednosti

- Kovarijansa $\text{Cov}(X,Y) = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n-1}$
- Koeficijent korelacije $[-1,1]$
- $\rho = \frac{\text{COV}_{x,y}}{\delta_x \delta_y}$

Portfolio – kombinacija rizičnih HOV

- Varijansa portfolija sa dvije HOV (rizična aktiva)

$$\delta^2 = E(R_i - \bar{R})^2$$

$$\delta^2 = E \left[X_1 (R_1 - \bar{R}_1) + X_2 (R_2 - \bar{R}_2) \right]^2$$

$$\delta^2 = \delta_1^2 X_1^2 + \delta_2^2 X_2^2 + 2X_1 X_2 COV_{1,2}$$

- tri ekstremna slučaja $\rho = 1$ $\rho = -1$ $\rho = 0$

Portfolio – kombinacija rizičnih i bezrizičnih HOV

- Varijansa portfolija

$$\delta^2 = \delta_1^2 X_1^2 + \delta_f^2 X_f^2 + 2X_1 X_f COV_{1,2}$$

-

$$COV_{1,2} = \rho_{1,2} \sigma_f \sigma_1$$

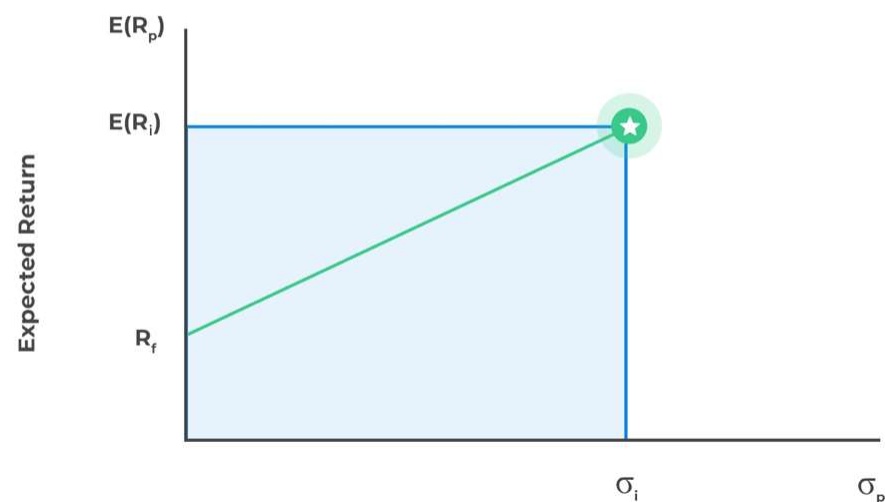
$$\delta^2 = \delta_1^2 X_1^2$$

- E(R)?

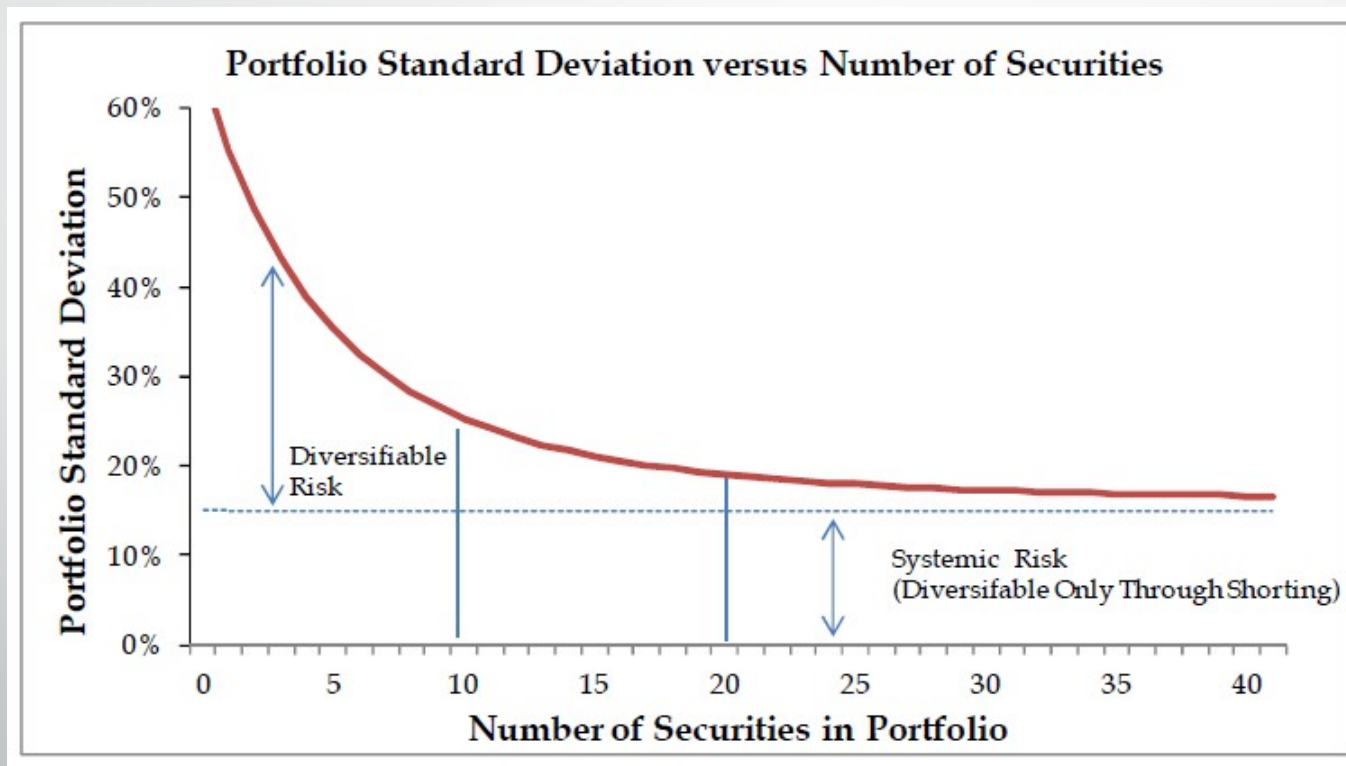
Linija alokacije kapaitala – Capital Allocation Line



The Capital Allocation Line (CAL)



Portfolio – kombinacija rizičnih HOV diversifikacija



Granica efikasnosti investiranja u HOV

